LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA: noção, relação e construção de conhecimentos

Antonio José da Silva
UFMA/CCET/DEMAT
antoniojsilva@ufma.br

Fernando Becker
UFRGS/FACED/PGIE
fernando.becker@ufrgs.br

Resumo

Esta pesquisa reporta-se ao problema descrito na literatura científica como o “fracasso do ensino do cálculo”. Propusemos conhecer as noções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral apresentam sobre limite. Para obter essas noções, objetos de aprendizagem foram criados e disponibilizados online, em páginas de um site com domínio privado, mas de acesso aberto. Cada objeto de aprendizagem foi elaborado contendo uma situação-problema referente aos *applets* de cada página e um espaço de registro de respostas. Os *applets* abordam situações que permitem o estudo de limites, derivadas e integrais; foram elaborados no Geogebra. Este artigo relata os resultados da atividade A2. A metodologia consistiu na aplicação de atividades na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Nelas interagiram alunos e OA. Para a complementação e investigação, foram feitas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano. Fundamenta-se a análise das respostas na Epistemologia Genética; em especial, na abstração reflexionante. A escolha deu-se devido ao caráter explicativo dessa teoria da gênese do conhecimento matemático. Os resultados demonstram que conhecimentos foram construídos em situação de interação entre alunos e OA. Várias noções foram registradas.

Palavras-chave: Noção de Limite. Objetos de Aprendizagem. Abstração Reflexionante. Geogebra.

LIMIT OF REAL FUNCTIONS AND GEOGEBRA: notion, relation and construction of knowledge

Abstract

This research refers to the problem described in the scientific literature as the “failure of calculus teaching”. We propose to know the notions that students of the discipline Differential and Integral Calculus present on limit. To get these notions, learning objects were created and made available online, on pages of a privately-owned, but open-access site. Each learning object (OA) was elaborated containing a problem situation regarding the applets of each page and a space of record of answers. The applets approach situations that allow the study of boundaries, derivatives and integrals; were developed in Geogebra. This article reports the results of Activity A2. The methodology consisted in the application of activities in the discipline Differential and Integral Calculus. In them they interacted students and OA. For the complementation and investigation, interviews were made inspired by the Piagetian clinical method. The analysis of the answers in the Genetic Epistemology is based; in particular, in reflective abstraction. The choice was due to the explanatory character of this theory of the genesis of mathematical knowledge. The results demonstrate that knowledge was built in a situation of interaction between students and OA. Several notions were recorded.

Keywords: Limit Notion. Learning Objects. Reflective Abstraction. Geogebra.

LÍMITE DE FUNCIONES REALES Y GEOGEBRA: noción, relación y construcción de conocimientos

Resumen

Esta investigación se refiere al problema descrito en la literatura científica como el “fracaso de la enseñanza del cálculo”. Propusimos conocer las nociones que alumnos de la disciplina Cálculo Diferencial e Integral presentan sobre límite. Para obtener estas nociones, los objetos de aprendizaje se crearon y se pusieron en línea en páginas de un sitio con dominio privado, pero de acceso abierto. Cada objeto de aprendizaje (OA) fue elaborado conteniendo una situación-problema referente a los applets de cada página y un espacio de registro de respuestas. Los applets abordan situaciones que permiten el estudio de límites, derivadas e integrales; fueron elaborados en Geogebra. Este artículo relata los resultados de la actividad A2. La metodología consistió en la aplicación de actividades en la disciplina Cálculo Diferencial e Integral. En ellas interactuaron alumnos y OA. Para la complementación e investigación, se realizaron

entrevistas inspiradas en el método clínico piagetiano. Se fundamenta el análisis de las respuestas en la Epistemología Genética; en especial, en la abstracción reflexionante. La elección se dio debido al carácter explicativo de esa teoría de la génesis del conocimiento matemático. Los resultados demuestran que los conocimientos se construyeron en una situación de interacción entre alumnos y OA. Varias nociones se registraron.

Palabras Clave: Noción de Límite. Objetos de Aprendizaje. Abstracción Reflexionante. Geogebra.

1 INTRODUÇÃO

A aprendizagem matemática é tema de pesquisa da educação matemática. Essa área de pesquisa das ciências humanas destaca-se pela diversidade das abordagens metodológicas e análise fundamentada em áreas como educação, psicologia, antropologia, sociologia e a própria matemática (PAIS, 2011; ALMOULOUD, 2007; FIORENTINI; LORENZATO, 2012). Há um grande número de pesquisas que apontam resultados positivos para o uso de recursos diversos e metodologias, validando sua eficácia pelos resultados obtidos na melhoria de resultados observados, no entanto, há pesquisas que se destacam por estudar o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem (PIAGET, 1977; 1995; FAGUNDES; SATO; MAÇADA, 1999; VALENTE, 2002; BONA; BASSO; FAGUNDES, 2014; BONA; BASSO, 2014; NOTARE; BASSO, 2012).

A informática age para propiciar a inovação, afinal, o cotidiano de muitos alunos é a vivência com as tecnologias. É importante salientar que a sala de aula é um lugar de interação entre aluno e a cultura mais elaborada, especialmente o conhecimento científico. Portanto, é natural que lhe sejam ofertadas vivências educacionais com suporte da informática educativa (FAGUNDES, SATO e MAÇADA, 1999; VALENTE, 2002).

Neste trabalho, foi feito o uso de tecnologias educacionais de ampla utilização nos espaços educacionais; são elas: o “Google Drive”, com suas tecnologias embarcadas, o Site Cálculo NasNuvens) e o “Geogebra”. O primeiro nos permitiu a coleta de dados e o seu armazenamento em tempo real. O segundo foi utilizado para criar um ambiente controlado para a pesquisa. Já o terceiro foi utilizado para criar e gerir as situações-problema[1] sob a forma de objetos de aprendizagem (OA). Nesta pesquisa, adotaremos o termo “tecnologia” para identificar TIC.

Esta pesquisa é parte da pesquisa apresentada na tese “**NOÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS E GEOGEBRA:** Um estudo em Epistemologia Genética”. Na

[1]Termo utilizado para identificar as atividades propostas aos alunos ou situações que o aluno identifica e se dispõe a solucionar.

tese foram utilizados 4 *applets*[2], designados por A1, A2, A3 e A4. Este artigo apresenta os resultados referentes à atividade com a atividade A2, que traz em sua estrutura didático-científica, a problemática da área de uma figura geométrica plana regular como função de seus lados e o limite dessa função em situações problema.

A motivação para a proposição desta pesquisa repousa em inquietações formuladas ao longo da vida docente no Ensino Superior.

1.1 O PROBLEMA E OS OBJETIVOS DA PESQUISA

A questão problema desta pesquisa é: “Qual a noção de limite de funções que alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, apresentam na interação com objetos de aprendizagem do Geogebra em ambiente virtual?”. O objetivo desta pesquisa é analisar, pelo espectro da epistemologia genética, a noção de limite de funções que alunos apresentam na interação com um *applet* elaborado com o Geogebra, em ambiente virtual. Especificamente quer-se investigar a noção de limite de funções que os sujeitos desta pesquisa apresentam na interação com uma situação problema e o próprio ambiente virtual que a hospeda. Quer-se investigar processos de abstração reflexionante realizados por eles ao tentar conceituar “limite de funções”. Este trabalho propõe-se a contribuir para o entendimento dos processos cognitivos envolvidos na noção de limites de funções[3]. Quer-se conhecer que noções de limite de funções os alunos apresentam na disciplina CDI. O processo de conceituação depende, entre outros fatores, de um processo de transformação de esquemas de ação em noções e em operações (VALENTE, 2002; PIAGET, 1977,1978).

As práticas e os temas a serem discutidos nesta pesquisa sustentam-se no escopo teórico da Epistemologia Genética, da informática aplicada à educação, e da educação matemática, concentrando análise sob o enfoque da teoria da Abstração Reflexionante, pois, segundo Piaget (1995, p. 6-7), “[...] é a única a operar na lógica e matemática puras”. Assim como em Lira (2008), que estudou o conceito de Limite de funções, nos apoiaremos nesta teoria para analisar e compreender, nessa ordem, as respostas e o pensamento de alunos sobre a temática aqui colocada.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A noção de limite está presente em diversas situações vividas por estudantes na Educação Básica. Julga-se natural que o aluno, ao chegar ao Ensino

---

[2] Aplicação executável em um navegador, não dependendo de instalação do gerador do arquivo fonte para esse fim.
[3]Neste trabalho, a expressão escrita “limite de funções” corresponde a “limite de funções Reais de uma variável real”.

Superior, apresente noções de limite mesmo sem ter tido contato direto com essa forma específica de explicar o comportamento de funções na vizinhança de um ponto (BARUFI, 1999). O CDI, como todo conhecimento matemático, estrutura-se por conceitos. São conceitos que advêm de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática, garantindo-lhe uma complexa estruturação.

O Método Clínico (MC) possibilita a explicação sobre uma situação, e, na grande maioria, essa explicação ocorre com um objeto pertencente à proposta de investigação. (DELVAL, 2002).

Na abstração reflexionante (AR), a construção do conhecimento é conduzida pelas generalizações, em nível de trocas simbólicas. Essa última obra referida faz-nos perceber que todo novo conhecimento supõe uma abstração. Ampliando esse tema, Piaget disse a Bringuier (1978, p. 32):

> O conhecimento é uma interação entre o indivíduo e o objeto, mas eu penso que o indivíduo não pode ser encerrado em uma estrutura dada, definitivamente [...] [acredita que] [...] o indivíduo constrói seus conhecimentos, constrói suas estruturas.

Nas palavras de Dolle (2011) e Bringuier (1978), fica evidente que o sujeito realiza seu desenvolvimento cognitivo; concebe o conhecimento como algo a ser construído, e cabe ao meio gerar condições para que esse sujeito construa seu conhecimento. Empregamos essa concepção nas situações-problema apresentadas aos alunos nesta pesquisa. A partir de uma situação descrita, os alunos podem agir livremente sobre os OA, o que permite ao aluno a possibilidade de observar as características dos objetos e refazer suas ações na busca da solução ou do entendimento do problema, pois compreendemos que os alunos são sujeitos ativos em um processo de aprendizagem e não apenas objeto da ação docente, por mais importante que seja esta (BECKER, 2012; 2012b; 2017). Compreendendo sua função, é possível descentrar as ações da sala de aula, com ênfase nos conteúdos, e voltá-las para a investigação dos processos de aprendizagem produzidos (DOLLE, 2011; PIAGET, 1977b). Não que os conteúdos sejam menos importantes, mas trata-se de conhecer como os alunos se desenvolvem e aprendem no ambiente escolar, e tanto a IE quanto a EG têm muito a contribuir para essa análise.

Para explicitar a AR, é feita, inicialmente, uma distinção entre abstração empírica (AE), e AR. Para Piaget (1995, p. 05-06), a AE é:

> [...] a que se apoia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc. [...] as propriedades [extraídas] sobre as quais se refere a abstração empírica existiam nos objetos antes de qualquer constatação por parte do sujeito. [Já a AR], [...] apoia-se sobre tais formas [geradas por esquemas] e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.), para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.).

Para Becker (2012b, p. 35):

> [...] [AE] apoia-se sobre os observáveis dos objetos e das ações nas suas características materiais [...] aquilo que o objeto ou as ações em suas características materiais possuíam antes de o sujeito agir sobre eles. Enquanto [a AR] apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito.

A abstração empírica limita-se a fornecer informações e dados do objeto. Ela não é fonte de novas construções. A abstração reflexionante realiza essa tarefa, pois "[...] toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia." (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 89). Já a AR acontece quando o sujeito retira das ações, e não do objeto, as características e propriedades, configurando, assim, a AR como um processo endógeno, afirmado por Piaget quando diz: "[AR] apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas" (PIAGET, 1995, p. 274). A abstração reflexionante realiza-se, portanto, pela retirada das qualidades das coordenações de ações do sujeito repassando-as para um patamar superior e reorganizando-as nesse patamar. A AR pode se apresentar sob duas formas: a abstração pseudoempírica e a abstração refletida. As abstrações pseudoempíricas (*pseudo-empiriques*) ocorrem "[...] a partir de objetos materiais, como se tratassem de abstrações empíricas, [no entanto] as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito." (PIAGET, 1995, p. 06). Nesse tipo de AR, "[...] o objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações" (PIAGET, 1995, p. 274). Já a abstração refletida (*réflechie*) implica em apropriação dos mecanismos gerais da ação e se trata de "[...] um processo de abstração reflexionante, procedendo por reflexão sobre as reflexões particulares" (PIAGET, 1995, p. 18). É a que resulta de um pensamento, ou seja, uma reflexão sobre a reflexão.

Objetos de Aprendizagem são mídias digitais projetadas para o uso educacional. É um conceito de considerável amplitude, pois temos uma quantidade considerável de ambientes, linguagens e mídias de variadas características. Os OA são caracterizados por sua reusabilidade, portabilidade e modularidade. De forma mais simples, é possível dizer que são arquivos digitais que auxiliam os processos de ensino e de aprendizagem (PIVA JÚNIOR, 2011).

O Geogebra (GGB) é um *software* livre de matemática e multiplataforma. É um *software* que desperta cada vez mais interesse de professores dos diversos níveis de ensino e das mais diferentes áreas de conhecimento devido à sua ampla utilização

3 METODOLOGIA

O site Cálculo NasNuvens (http://geogebra.nasnuvens.net.br) foi desenvolvido para receber e possibilitar a utilização de objetos digitais de aprendizagem. Esta pesquisa é de natureza aplicada. Quanto aos objetivos, é descritiva/explicativa e sua abordagem é qualitativa. (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Procedimento 1 (P1) – Análise e resolução da situação-problema – a atividade foi programada com o professor da disciplina CDI; as atividades envolveram o acesso e a discussão das situações-problema contidas no site Cálculo NasNuvens. Da interação entre aluno e situação-problema, foi possível coletar registros escritos, realizados pelos alunos. Os registros foram coletados com a utilização de tecnologia *Google Drive*. Nesta etapa, a atividade A2 foi aplicada ao final do primeiro terço da disciplina CDI, o que equivale à conclusão da unidade disciplinar relativa ao estudo de limites de funções.

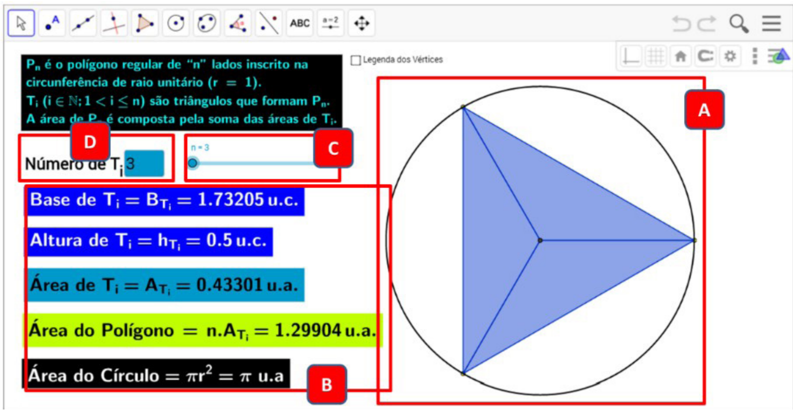
Procedimento 2 (P2) – Entrevista inspirada no método clínico utilizado por Jean Piaget – Os alunos foram entrevistados em dias marcados, e a realização da entrevista não foi considerada atividade programada da disciplina CDI. Subsidiaram a entrevista os registros escritos, coletados anteriormente via tecnologia *Google Drive*. A entrevista, registrada em áudio e vídeo, é iniciada a partir de questionamentos advindos da situação-problema contidas na atividade A2.

Procedimento 3 (P3) – Análise dos dados obtidos – Para a realização da análise, as entrevistas foram transcritas e, a partir dos vídeos, foram analisadas as falas do docente, as falas dos discentes e as ações realizadas por ambos. Foram incluídos nesse procedimento os registros escritos de respostas, coletados a partir das experiências dos alunos com a situação-problema. Visando investigar a noção de limite de funções, que alunos apresentavam na interação entre eles e os *applet*, disponível na situação-problema, utilizou-se como aporte teórico a abstração reflexionante para análise das falas, ações e registros escritos de respostas.

O universo desta pesquisa é o conjunto de estudantes de graduação da UFMA matriculados em disciplinas que tratam de temas relativos ao estudo de limites de funções. A amostra de alunos que participaram desta pesquisa foi composta por alunos do primeiro ou segundo períodos do curso de Licenciatura em Ciências Naturais (LCN) da UFMA. Participaram das atividades desta pesquisa todos os 18 alunos matriculados na turma única da disciplina CDI que se disponibilizaram a prosseguir até o final da pesquisa. A participação na pesquisa ocorreu com a assinatura do termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE), que foi lido, discutido, entregue e recebido em datas posteriores à sua entrega.

A atividade 2 (A2) trata do fato de termos um polígono inscrito na circunferência para a estimativa da área do círculo.

Figura 1 - Interface da atividade 2 (A2)



Fonte: Próprios autores.

É uma atividade com possibilidades de exploração do conceito de limite em várias situações. Algumas dessas situações apresentadas nesta atividade demonstram, na análise de valores numéricos, a possibilidade de construção de novos conceitos e a ampliação de outros já existentes. A atividade A2, ver figura 1, foi disponibilizada para acesso livre no endereço: http://geogebra.nasnuvens.net.br/atividades/a02/. Esta atividade foi originada a partir de um OA disponibilizado pelo professor Thales Vieira em sua página: www.im.ufal.br/professor/thales/tics/. O *applet* desse OA foi modificado, sendo incorporado a ele novos recursos em conformidade às exigências desta pesquisa.

Investigando Limites: A atividade apresenta uma circunferência C de centro O e raio *r*. Inscrito nessa circunferência temos um polígono regular P_n com número de lados $n \geq 3$ e comprimento do lado $l > 0$, conforme está descrito na Figura 1 no item **A**. O círculo tem área $A(C) = \pi r^2$. P_n é composto por triângulos isósceles T_i idênticos. Os lados isósceles de T_i tem medida *r*. O número de lados pode ser alterado por meio dos controles deslizantes laterais e controle de entrada numérica observada nos itens **C** e **D** da Figura 1. A implicação direta disso é a alteração do número de triângulos. O Quadro **B** destaca os valores numéricos que variam em função de *n*, e, nele, temos a base B_{T_i} de T_i, que é também $l > 0$ de P_n. Temos a altura h_{T_i} de T_i, a área A_{T_i} de T_i, a área do polígono $A(P_n) = n \cdot A_{T_i}$ e a área do círculo $A(C) = \pi r^2 = \pi$, pois $r = 1$. O círculo é delimitado pela circunferência C e S_i é a área resultante da diferença entre a área do círculo e a área de P_n interno a C.

Conhecimento Matemático: Variando *n,* o valor de $A(P_n)$ varia diretamente, se n aumenta, $A(P_n)$ aumenta; da mesma forma que se $A(P_n)$ diminui, é porque n foi diminuído. Se $n \to \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \to A(C)$. Outras implicações são que se $n \to \infty$, então $l \to 0$, ou seja, a base $B_{T_i} \to 0$, a altura,

$A_{T_i} \to 0$ e $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$, e, nesse caso, podemos escrever: $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$. Conhecimentos podem ser construídos a partir do *applet*. Os alunos poderão:

C1. Reconhecer que se $n \to \infty$, a implicação direta é que $A(P_n) \to A(C)$ por diferença de áreas em que $S_i \to 0$;

C2. Compreender que se $n \to \infty$, então $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$);

C3. Compreender que se $n \to \infty$, então a altura $h_{T_i} \to r = 1$;

C4. Compreender que se $n \to \infty$, $A_{T_i} \to 0$;

C5. Concluir que se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$;

C6. Concluir que $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$.

É interessante observar que o conceito de limite está presente na descrição desse processo em diversas situações. Algumas relações (R) foram estabelecidas conforme análise das falas, registros e ações de docentes em processo de interação com a atividade A2.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Na sequência do texto, serão descritos os resultados por aluno, devidamente identificados com código.

4.1 RELAÇÕES DE CONHECIMENTOS

Os resultados obtidos correspondem à tentativa desta pesquisa, de responder ao problema ou questão de pesquisa, e atender aos objetivos propostos na mesma. A atividade A2 se relaciona diretamente com a questão de pesquisa.

Na atividade A2, foram destacados 6 (seis) conhecimentos a serem mobilizados no *applet*. Desses conhecimentos havia o conhecimento C1 que se relaciona ao processo de estimação e reconhecimento visual das áreas por comparação. Os conhecimentos C2, C3 e C4 tratam de limites que fundamentam a análise da situação-problema. O conhecimento C5 é uma conclusão que trata da composição da área. O conhecimento C6 é a conclusão da situação-problema, e esse conhecimento trata também da formalização desse conhecimento em linguagem de limites. Após a análise dos dados coletados, foi possível, dentro do grupo de participantes, determinar grupos de desenvolvimento a partir dos conhecimentos apresentados e a relação (R) estabelecida com esses conhecimentos. Foram observados 7 (sete) grupos de desenvolvimentos identificados pelos códigos R1, R2, R3, R4, R5, R6 e R7.

Relação 1 – R1: $C1 \wedge \left(\left((C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5\right) \rightarrow C6\right)$. Conceitua a área como $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_{T_i} = A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação apresenta todos os conhecimentos descritos na situação-problema. Trata dos processos e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Apresentam a área como o limite de uma soma infinita. Neste grupo, estão os alunos M1 e M4.

Relação 2 – R2: $C1 \wedge \left((C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5\right)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação se assemelha à relação R1, exceto pela ausência de C6, não ocorrendo a formalização do processo de aproximação entre as áreas do polígono inscrito e do círculo. Trata dos processos e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Neste grupo, estão os alunos M2, M3, M7, M8 e M10.

Relação 3 – R3: $(C2 \wedge C3 \wedge C4) \rightarrow C5$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Esta relação trata do processo de composição da área do polígono inscrito e das noções de limite que fundamentam as conclusões do problema proposto. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas. Conclui que a área do polígono inscrito pode ser representada por uma soma de n áreas iguais. Neste grupo, estão os alunos M5 e M12.

Relação 4 – R4: $C1 \wedge (C2 \rightarrow C5)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \rightarrow A(C) = \pi r^2 = \pi$. Nesta relação, ocorre a conclusão pela decomposição da área do polígono inscrito em n triângulos. O aluno considera visualmente a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. O aluno apresenta uma noção de limite da base. Neste grupo, está o aluno M6

Relação 5 – R5: $C1 \wedge (C2 \wedge C3 \wedge C4)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$ com $l \rightarrow 0$ $(B_{T_i} \rightarrow 0)$, $h_{T_i} \rightarrow r = 1$ e $A_{T_i} \rightarrow 0$. Nesta relação, o aluno considera, visualmente, a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. Os alunos apresentam noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, estão os alunos M9, M11, M13, M14 e M25.

Relação 6 – R6: $C1 \wedge \left(C3 \wedge (C2 \vee C4)\right)$. Diz que se $n \rightarrow \infty$, então $A(P_n) \rightarrow A(C)$ com $l \rightarrow 0$ $(B_{T_i} \rightarrow 0)$, $h_{T_i} \rightarrow r = 1$ e $A_{T_i} \rightarrow 0$. Nesta relação, o aluno considera, visualmente, a sobreposição das figuras como processo que possibilita obter visualmente uma estimativa da área do círculo. O aluno apresenta noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, estão os alunos M22 e M32.

Relação 7 – R7: $C2 \wedge C3 \wedge C4$. Diz que se $n \to \infty$, então $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$), $h_{T_i} \to r = 1$ e $A_{T_i} \to 0$. Nesta relação, o aluno apresenta noções de limite da base, da altura e das áreas dos triângulos. Neste grupo, está o aluno M15.

4.2 NOÇÕES E CONSTRUÇÕES

Nas entrevistas, houve uma reprodução exploratória dos processos realizados por eles. A partir dos registros, das falas e das ações, foi possível conhecer as noções de limite que alunos apresentavam diante das situações-problema contidas nos OA.

Apesar da dificuldade com fundamentos da geometria e contradições apresentadas, os registros de resposta e a entrevista permitiu observar noções de limite relacionadas aos comprimentos e às áreas. As noções de limite apresentadas foram as que resultaram da variação de n. As noções de limite sobre comprimentos são as da base ou lado que tendem para zero e altura ou apótema que tendem para o comprimento de medida 1, que é a medida do raio, ou seja, se $n \to \infty$, então a altura $h_{T_i} \to r = 1$ e $l \to 0$ ($B_{T_i} \to 0$). As noções de limites de área dizem respeito às áreas de cada triângulo T_i e à área do polígono P_n, ou seja, se $n \to \infty$, $A_{T_i} \to 0$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$. Por abstração refletida, com os alunos utilizando a noção de limite, e fazendo a base tender para zero, compreendem que a altura tende a ter o mesmo comprimento dos lados do triângulo isósceles. Ocorreu, em alguns casos, a conceituação de limite quando os alunos afirmaram que, nas noções apresentadas, os valores, para os quais eles tendem, não necessariamente precisavam ser exatos no ponto. Essas afirmações foram fundamentadas em seus significados geométricos e não somente na definição de limite. Foi apresentada a noção de limite que: se $n \to \infty$, então $A(P_n) = n \cdot A_{T_i} \to A(C) = \pi r^2 = \pi$. Essa noção de limite está presente na conceituação de integral definida como o limite da soma das áreas. Esse produto é caracterizado por uma série de áreas que somadas, convergem para a área do círculo quando n aumenta. Essa também é uma noção do limite de uma sequência de áreas que converge para π.

Foi apresentada pelos alunos uma noção de limite relacionando o perímetro do polígono com a circunferência. No transcorrer das entrevistas, alguns deles apresentaram essa noção de limite relacionando-a da seguinte forma: se

$n \to \infty$, então $2P \to C$, e $2P$ é o perímetro de P_n. Outra noção de área afirma que, se $n \to \infty$ e $S_i = |A(P_n) - A(C)|$, então $S_i \to 0$, ou seja, a área do polígono P_n, inscrito na circunferência, tende para o valor da área do círculo à medida que n tende para infinito. Conclui-se que uma noção de limite da área de P_n equivale a dizer que a circunferência é o limite do perímetro do polígono se $A(P_n) \to A(C)$.

Um erro comum, na atividade A2, é o conflito conceitual entre infinito e partes tão pequenas quanto se queira, nesse conflito, os sujeitos afirmam que ao variar n tendendo para infinito, a base tende para mais infinito. Nessa afirmação, os alunos confundiram a possibilidade de diminuição de um lado infinitas vezes com os valores cada vez menores de seus comprimentos.

Uma outra noção de limite da área do polígono P_n pôde ser identificada quando os arcos e as bases tendem a diminuir e ter o mesmo comprimento à medida que n aumenta. Nessa noção, há a convergência dos valores dos arcos e dos lados para um limite, e esses comprimentos tendem para zero.

As noções de limites, construídas e relatadas, surgem a partir da variação do número de triângulos, ou seja, pela variação de n no *applet*. Algumas noções foram relatadas pelos alunos após a apresentação de novas situações problema durante a entrevista, que se tornaram necessárias mediante respostas conflitantes. A relação de causa e efeito da variação de n sobre a área de P_n está presente na totalidade dos registros realizados pelos alunos.

Algumas noções de limite mostraram-se inconsistentes, ainda em formação, e muitas dessas inconsistências são devidas a conceitos de elementos geométricos, próprios da situação-problema na atividade, ainda não construídos. Vários processos de construção de conhecimento ocorreram por abstração refletida; é por abstração refletida que se supera uma noção, atingindo o conceito. À medida que n teve seu valor alterado, os alunos compreenderam que, fazendo o valor de n tender para o infinito, o comprimento da altura tende para o comprimento do raio, mesmo sem essa medida estar visualmente perceptível. O *applet* foi usado, frequentemente, para elaborar e fundamentar as respostas relativas às situações-problema que foram colocadas aos alunos.

Em geral, os alunos apresentaram mais conhecimentos sobre a situação-problema no registro escrito do que na entrevista. A entrevista mostrou ser esclarecedora, exploratória com grande parte dos alunos. Alguns registros foram concisos e outros foram vagos. As entrevistas foram esclarecedoras, algumas apresentaram registros com itens contraditórios ou não revelavam os bons registros escritos, previamente elaborados por eles.

5 CONCLUSÕES

É possível concluir que noções de limite foram apresentadas com o conceito de função e sem a utilização desse conceito; porém, nota-se que, nos casos em que a noção de limite é apresentada com o conceito de função, ela é mais consistente e a expressão de limite se estende a vários elementos e não somente à área. Nesta pesquisa, noções de limite foram apresentadas por alunos; essas noções envolveram temas como infinito, área e comprimento. A conclusão pela possibilidade de estimar a área do círculo a partir de polígonos regulares é resultante de processos de abstração reflexionante, decorrentes da interação com as situações-problema.

A abstração pseudoempírica mostrou-se como um importante recurso para a educação. Por ela é possível valorizar o processo empírico realizado pelos alunos em sua vida escolar. Permite conhecer a qualidade das interações entre sujeito e objeto que levam à construção da novidade por processos da abstração refletida. A associação de tecnologias da Google e do Geogebra, em um único objeto de aprendizagem, permitiu observar as variações de respostas e, consequentemente, elaborar avaliações dos dados coletados, configurando essa metodologia de coleta não só como um importante instrumento metodológico, mas também um poderoso instrumento didático e avaliativo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007. 218 p.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento.** 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012. 200 p.

BECKER, F. Abstração Pseudoempírica : significado epistemológico e impacto metodológico. **Educação & Realidade**, v. 42, n. 1, p. 371–393, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/edreal/v42n1/2175-6236-edreal-42-01-00371.pdf>. . Acesso em: 02 fev. 2018.

BECKER, Fernando. **Epistemologia do professor de matemática.** Petrópolis: Vozes, 2012. 496 p. (b)

BONA, A. S. DE; BASSO, M. V. D. A. Abstração Refletida presente na Aprendizagem Cooperativa medida pelo Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 22, n. 3, p. 35, 2014. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/2457>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BONA, A. S. DE; BASSO, M. V. DE A.; FAGUNDES, L. D. C. Cooperar e Abstrair: uma forma de analisar o processo de aprendizagem de Matemática por meio das Tecnologias Digitais Online. **Schème-Revista Eletrônica …**, v. 5, p. 81–102, 2014. Disponível em: <http://200.145.171.5/revistas/index.php/scheme/article/view/3573>. . Acesso em: 02 dez. 2016.

BRINGUIER, Jean - Claude. **Conversando com Jean Piaget.** Rio de Janeiro: DIFEL, 1978. 210 p. Tradução: Maria José Guedes.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002. 267 p. Tradução de Fátima Murad.

DOLLE, Jean-marie. **Princípios para uma pedagogia científica.** Porto Alegre: Penso, 2011. 199 p. Tradução: Sandra Loguércio.

FAGUNDES, Léa da Cruz; SATO, Luciane Sayuri; MAÇADA, Débora Laurino. **Aprendizes do futuro:** as inovações começaram. Brasília: Mec/seed/proinfo, 1999. 95 p. (Coleção Informática para a mudança na Educação). Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003153.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

FIORENTINI, Dario. LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos Teóricos e Metodológicos. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LIRA, Antonio da Fonseca de. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com ut ilização de objetos digitais.** 2008. 184 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Cinted, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14666/000666894.pdf?sequence=1>. Acesso em: 05 jun. 2014.

MONTANGERO, Jacques; MAURICE-NAVILLE, Danielle. **Piaget ou a Inteligência em evolução:** sinopse cronológica e vocabulário. Porto Alegre: Artmed, 1998. 242 p. Tradução: Tânia Beatriz Iwaszko Marques e Fernando Becker.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. DE A. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educaçao**, v. 10, n. 3, p. 1–11, 2012. Disponível em: < http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/36459 >. Acesso em: 14 out. 2016.

PAIS, Luís Carlos. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PIAGET, Jean et al. **A Tomada de Consciência.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1977. 211 p. Tradução: Edson Braga de Souza.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, Jean. **Fazer e compreender.** São Paulo: Edições Melhoramentos, 1978.

186 p. Tradução: Christina Larroudé de Paula Leite. Revisão Técnica: Lysandre Maria Castelo Branco.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 5. ed. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 1977. 96 p. Tradução: Ivete Braga. (b)

PIVA JÚNIOR, Dilermando et al. **EAD na prática:** planejamento, métodos e ambientes de educação online. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. 194 p.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. DE. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book Metodologia do Trabalho Cientifico.pdf . Acesso em 06 de mar de 2017.

VALENTE, José Armando. Espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A tecnologia no ensino:** implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. Cap. 1. p. 15-37.

BIOGRAFIA DOS AUTORES

Antonio José da Silva

Doutor em Informática na Educação pelo CINTED/UFRGS. Professor de Graduação lotado no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão. Professor da Pós-graduação no Mestrado PROFMAT e no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Fernando Becker

Doutor em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano pela USP. Professor Titular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor dos Programas de Pós-graduação em Educação (PPGEDU/FACED) e Informática na Educação (PGIE/CINTED), ambos na UFRGS.